第 40 卷 第 2 期
2023 年 4 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 40 No. 2
Apr. 2023

文章编号:1000-4939(2023)02-0294-08

岩石圆盘径向压缩破坏的 Voronoi 子块体单元 DDA 方法模拟

周大波[1],甯尤军[1],李春玉[1],王大国[2]

(1 西南石油大学机电工程学院,610500 成都;2 西南石油大学土木工程与测绘学院,610500 成都)

摘 要:非连续变形分析(DDA)方法是计算离散可变形块体系统力学行为的数值计算方法,可通过子块体单元 DDA 方法模拟岩石的开裂破坏。考虑到 Voronoi 多边形颗粒与细观尺度下岩石矿物晶粒形态的相似性,提出一种基于随机圆的 Voronoi 颗粒单元模型生成方法;并通过完整及带预制裂纹岩石圆盘径向压缩破坏的模拟,验证岩石破裂问题 Voronoi 子块体单元 DDA 模拟方法的适用性。结果表明,当子块体单元数较小时,圆盘表现出更高的整体强度;随着子块体单元数的增大,起裂处位置更接近真实,开裂破坏路径更清晰;子块体单元数较大时不同倾角预制裂纹圆盘破坏的模拟结果与实验结果高度吻合,并能有效反映圆盘中心加工小孔对开裂破坏路径的影响。使用 Voronoi 子块体单元 DDA 方法能够有效模拟岩石的开裂破坏过程,为进一步开展基于 Voronoi 颗粒单元模型的岩石开裂破坏模拟创造了条件。

关键词:岩石圆盘;开裂破坏;Voronoi 颗粒单元;非连续变形分析(DDA)

中图分类号:P642.3　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.02.007

Simulation of rock disc failure under diametrical compression by the Voronoi sub-block element DDA

ZHOU Dabo[1], NING Youjun[1], LI Chunyu[1], WANG Daguo[2]

(1. School of Mechatronic Engineering, Southwest Petroleum University, 610500 Chengdu, China;
2. School of Civil Engineering and Geomatics, Southwest Petroleum University, 610500 Chengdu, China)

Abstract: Discontinuous deformation analysis (DDA) is a numerical method that computes the mechanical behaviors of discrete deformable-block systems, which can be used to simulate the cracking failure of rock by the sub-block method. Considering the similarity of morphology between Voronoi polygonal particles and rock mineral grains shapes at the mesoscale, a generation method of Voronoi particle element model based on random circles is proposed. By simulating the cracking failure process of intact rock disc and rock discs with a pre-existing crack, the feasibility of simulating rock cracking failure with the Voronoi sub-block element DDA is verified. Results indicate that the rock disc shows higher integral strength with the decrease of the number of sub-block elements. With the increase of the element number, the crack initiation position

收稿日期:2022-06-15　　**修回日期**:2022-10-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 42171108);四川省自然科学基金资助项目(No. 2022NSFSC0263)

通信作者:甯尤军,研究员。E-mail: cnningyj@foxmail.com

引用格式:周大波,甯尤军,李春玉,等. 岩石圆盘径向压缩破坏的 Voronoi 子块体单元 DDA 方法模拟[J]. 应用力学学报,2023,40(2):294-301.
ZHOU Dabo, NING Youjun, LI Chunyu, et al. Simulation of rock disc failure under diametrical compression by the Voronoi sub-block element DDA[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(2):294-301.

is closer to that in reality, and the failure path gets clearer. With a large-enough number of the elements, the cracking failure simulation results of the discs with different pre-existing crack inclinations are highly consistent with the experimental results, and the influence of the center machining hole in the disc on the failure path can be accurately captured as well. The Voronoi sub-block element DDA can effectively simulate the cracking failure process of rock, which provides conditions for the further simulation of rock cracking failure with Voronoi particle elements.

Key words: rock discs; cracking failure; Voronoi particle element; discontinuous deformation analysis (DDA)

岩石是一种不连续性、非均质、各向异性的天然材料，岩石在外载作用下的破坏过程实质上是岩石中裂纹的萌生、发育与贯通的过程。圆盘劈裂是典型的岩石变形破裂实验方法[1-5]，而数值模拟是研究岩石变形破裂行为的重要手段。

在连续数值计算方法中，有限元法（finite element method，FEM）在岩石破坏问题的研究中得到了广泛的应用。ZHU 等[6]采用基于 FEM 的 RFPA 方法模拟了岩石圆盘在静态和动态加载下的破坏过程；SAKSALA 等[7]对岩石圆盘进行不同冲击速度的动态实验并开展了 FEM 模拟。FEM 中基于单元损伤大变形或单元删除的破坏模拟方法不是对岩石破裂面的直接描述，对模拟后续的岩石大位移及接触问题存在困难。在非连续数值计算方法中，离散元法（discrete element method，DEM）在岩石的开裂破坏模拟中也得到了广泛应用。如孟京京等[8]使用 DEM 颗粒流程序（particle flow code，PFC）模拟了不同中心角平台圆盘的巴西劈裂和直接拉伸试验；YANG 等[9]利用 PFC 模拟了完整及带预制裂纹岩石圆盘的破裂过程。PFC 将岩石材料离散成圆形颗粒，基于粒间的接触描述材料的拉、剪破坏，存在颗粒形态与岩石晶体形态差异较大，以及颗粒尺寸和接触参数较难确定等难题。

连续-非连续耦合或统一的数值方法对于岩石开裂破坏的模拟具有较好的适用性。如张世瑞等[10]基于 FEM-DEM 耦合方法研究了不同 Voronoi 颗粒尺寸对岩石试样单轴抗压强度及损伤应力的影响。流形元法（numerical manifold method，NMM）是连续和非连续相统一的数值方法，被应用于岩石等材料的复杂开裂破坏问题模拟[11-12]。LIU 等[13-14]采用 NMM 法模拟了岩石的单轴压缩与圆盘劈裂等经典实验，结果表明采用 Voronoi 颗粒能够较好地反映矿物粒度对岩石力学性能的影响。

非连续变形分析（discontinuous deformation analysis，DDA）[15]是能够模拟任意形状块体单元的隐式非连续数值计算方法，较多学者采用 DDA 方法模拟了岩石的变形破裂问题[16]。如 JIAO 等[17]通过引入虚拟节理的概念，采用三角形子块体单元，模拟了裂纹的扩展、贯通到岩石的碎裂与坍塌全过程。倪克松等[18]在 DDA 子块体单元开裂算法中根据邻近子块体的应力状态进行开裂判断，降低了网格依赖性。YU 等[19]在 DDA 中提出了一种分布式弹簧接触模型，提升了接触强度问题的模拟精度。张开雨等[20]采用基于 Voronoi 离散的 DDA 方法研究了脆性材料的动态裂纹扩展。

本研究发展一种基于随机圆的 Voronoi 颗粒离散模型建立方法，并开展完整和带预制裂纹岩石圆盘径向压缩破坏的 DDA 模拟，研究 Voronoi 子块体单元尺寸对模拟结果的影响，验证 Voronoi 子块体单元 DDA 方法模拟岩石开裂破坏的可行性。

1　Voronoi 颗粒单元模型的建立方法

图 1 为 Voronoi 颗粒单元模型的建立过程。步骤一通过在子域中生成给定级配的随机圆引入级配特性控制参数，并通过子域的复制以及步骤三中的中心区域截取获得模型周期特性。Voronoi 颗粒在步骤二中基于随机圆的圆心生成，进而通过步骤三中的中心截取区域再拼接获得足够大的 Voronoi 颗粒单元分布区域。

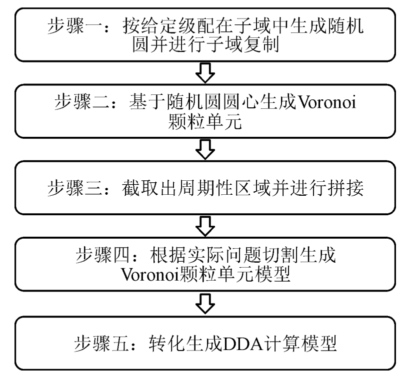


图 1　Voronoi 颗粒单元模型的建立过程

Fig. 1　Establishment process of Voronoi particle element model

与直接生成全域的 Voronoi 颗粒单元相比,拼接的方法具有更高的生成效率。进而在步骤四中,根据实际问题的需要,通过切割生成任意形状(含带孔洞的情况)的岩石 Voronoi 颗粒单元模型。最后,在步骤五中根据 DDA 块体单元的格式,将 Voronoi 颗粒单元模型转化 DDA 计算模型。

以图 2 为例,在步骤一中,首先在 A1 正方形子域内按给定级配信息生成互不重叠的随机圆,并将 A1 子域内的随机圆复制到相邻的 A2、A3 和 A4 子域。在 A1 子域随机圆投放的过程中,实际的投放区域将向外延伸最大尺寸圆形颗粒直径的 0.25 倍,以尽量消除子域边界处生成 Voronoi 颗粒的奇异性。

在步骤二中,如图 3 所示,首先在步骤一的基础上基于所有随机圆的圆心生成三角形网格,再以三角形的外接圆圆心作为 Voronoi 颗粒的角点生成 Voronoi 颗粒群。由此得到的 Voronoi 颗粒在很大程度上继承了步骤一中随机圆的级配信息。

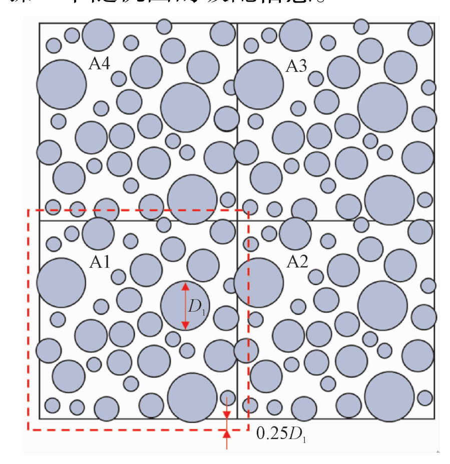


图 2 子域随机圆的生成及子域的复制

Fig. 2 Random circle generation in sub-domain and its replication

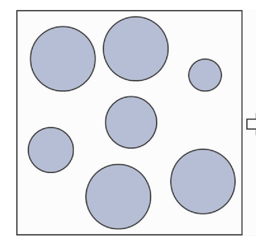
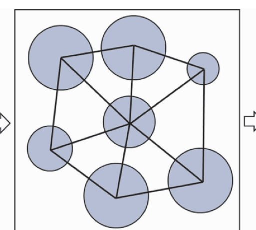
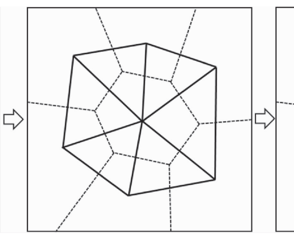
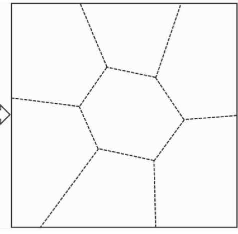





图 3 基于随机圆圆心生成 Voronoi 颗粒

Fig. 3 Generating Voronoi particles based on random circle centers

如图 4(a)所示,在步骤三中,连接前面 A1、A2、A3 和 A4 子域的中心,截取出中心 A0 区域,并对 A0 区域进行复制拼接,直到整个区域的大小满足实际建模的需要。截取得到的 A0 区域模型以及拼接后的模型都具有边界处结构的周期性,可以为开展代表性体积单元(representative volume element, RVE)研究提供条件。

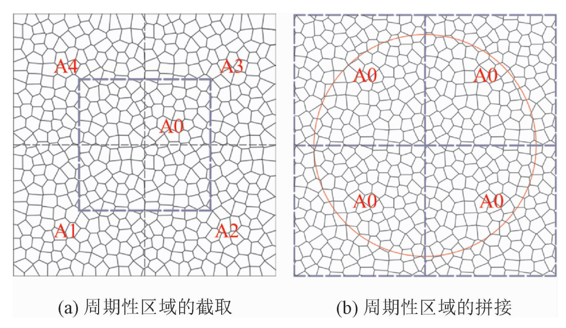


图 4 周期性区域的截取与拼接

Fig. 4 The cutting-out and assembling of periodic regions

如图 4(b)所示,Voronoi 颗粒的区域大小满足了建立红色圆圈所示的岩石圆盘建模的需要。为避免过短边对后续 DDA 计算的影响,拼接完成后还对具有过短边的 Voronoi 颗粒进行了局部重组优化。

在步骤四中,对前面的 Voronoi 颗粒拼接模型进行边界或孔洞切割,生成实际建模所需的外轮廓或内部孔洞。如图 5 所示为所建立的带有一定宽度中心预制裂纹的岩石圆盘模型,其中的预制裂纹由程序通过孔洞切割算法自动生成。在切割过程中,切割边界处会伴有极小或畸形的 Voronoi 单元生成,为避免其对 DDA 计算精度和速度产生影响,还将在不影响边界形态的基础上对这些单元进行局部重组优化。以上得到的 Voronoi 颗粒单元模型,最后在步骤五中被转化生成 DDA 的计算模型。

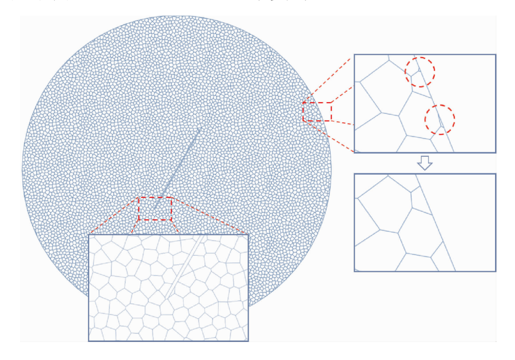


图 5 带预制裂纹的圆盘模型及其边界优化

Fig. 5 Disc with a pre-existing crack and boundary optimization

2　圆盘径向压缩破坏模拟

DDA 的每个块体处于常应力状态[15]。无论采用三角形[21]或 Voronoi 单元划分，子块体单元 DDA 方法都是通过引入虚拟节理对连续岩石模型进行离散，子块体单元间的虚拟节理赋以连续岩石的强度，从而实现连续岩石变形的模拟。当子块体单元的应力水平达到岩石强度时，临近虚拟节理转变为真实节理，即发生岩石的开裂破坏。其中岩石的拉伸和剪切开裂破坏分别采用最大拉应力和莫尔-库仑强度准则。

2.1　完整圆盘

图 6 为完整圆盘的几何模型和加载及约束条件。圆盘通过下端固定板和上端位移加载板实现径向压缩，并在上端加载板与圆盘间设置一个测量板。

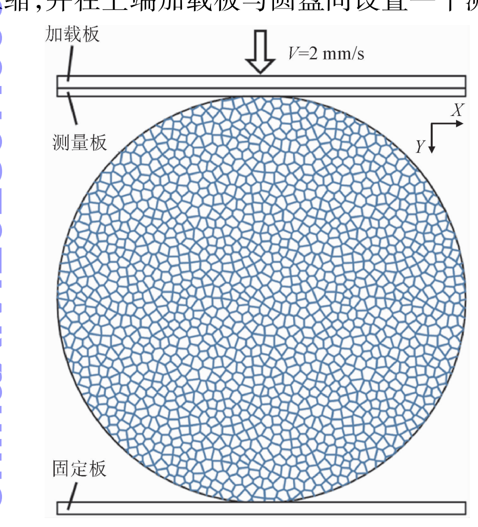


图 6　完整圆盘模型

Fig. 6　An intact disc model

测量板作为一个常应力 DDA 块体，其 Y 方向应力能够实时反映圆盘在加载方向上的整体应力水平。圆盘直径 100 mm，圆盘上下端设置中心角为 10°的平台，且与固定板及测量板间的接触面设置为光滑面，从而缓解加载端的应力集中。加载板向下的加载速度取为 2 mm/s，圆盘单元数考虑在约1 500 ~ 7 500范围内，每间隔约 1 500 单元数建立 1 个模型，从而对圆盘的劈裂破坏模拟进行网格尺寸敏感性分析。本研究暂不考虑 Voronoi 颗粒单元级配对圆盘破裂的影响，因此所有模型都采用尺寸相对均匀的网格。圆盘的力学参数和 DDA 计算控制参数取值如表 1 所示。

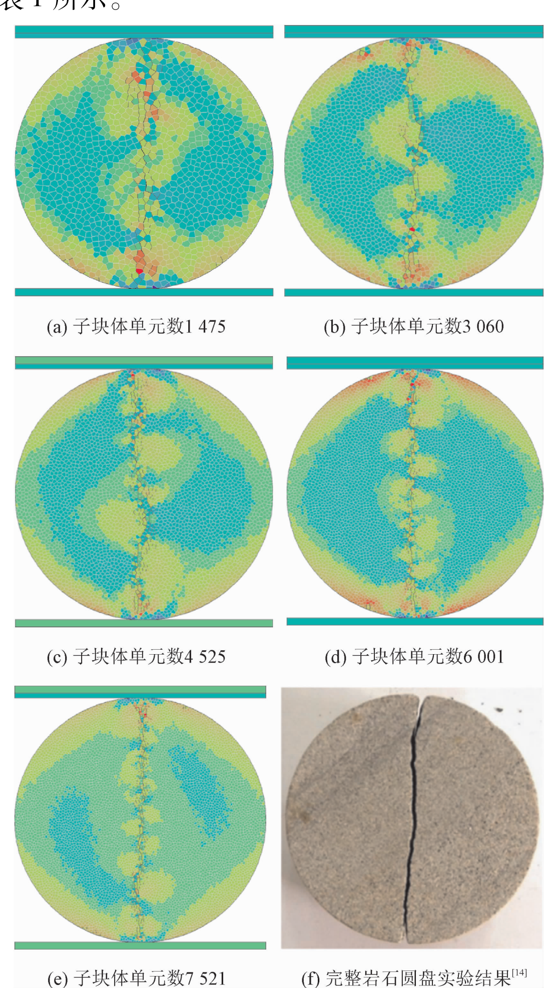


图 7　不同子块体单元数下的完整圆盘劈裂的 DDA 模拟结果及实验结果

Fig. 7　DDA simulation results with different number of sub-blocks and experimental result of an intact disc

表 1　圆盘力学参数与 DDA 计算控制参数

Tab. 1　Disc mechanical parameters and DDA computing control parameters

弹性模量/GPa	泊松比	抗拉强度/MPa	内摩擦角/(°)	内聚力/MPa	弹簧刚度/GPa	时间步长/s	最大位移比
20	0.2	1.0	35	8.0	100	1×10^{-6}	5×10^{-4}

图 7 为不同子块体单元数完整圆盘劈裂的 DDA 模拟结果及其与实验结果的比较。可以看出，不同单元数条件下圆盘的最终劈裂破坏形态基本一致。增加子块体单元数可以使初始裂纹更接近圆盘中心，裂纹贯穿路径更接近理想路径，裂纹带变窄、劈裂路径更清晰，从而与实验破坏形态更加接近。

图 8 是子块体单元数为 7 521 时圆盘的劈裂破坏过程。可以看出，在第 13 790 时步，圆盘初始裂纹

出现在接近圆盘中心位置,说明此时该位置的最大主应力率先达到材料的抗拉强度 1.0 MPa。随着加载板压缩位移的继续增加,裂纹沿加载方向扩展并贯穿整个圆盘,从而发生劈裂破坏。需要说明的是,为了较好地捕捉准静态渐进开裂破坏中应力逐渐释放对开裂破坏过程的影响[21],计算中 1 个时步内仅允许最多两条虚拟节理发生开裂,因此图中的 X 方向最大拉应力出现了明显高于 1.0 MPa 的现象。

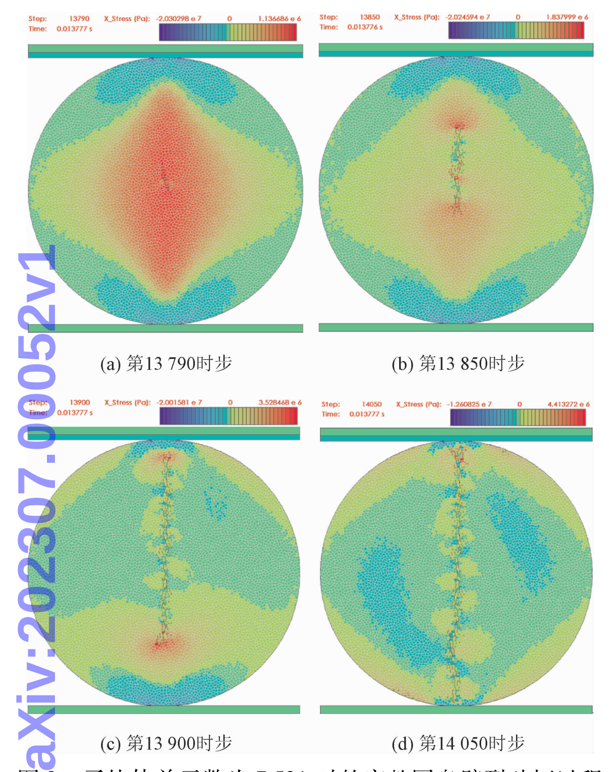


图 8 子块体单元数为 7 521 时的完整圆盘劈裂破坏过程

Fig. 8 Splitting process of intact disc with 7 521 sub-blocks

图 9 为不同子块体单元数条件下测量板的 Y 方向应力时间曲线。

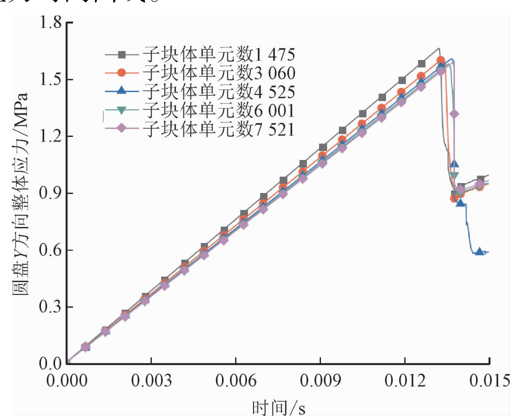


图 9 不同子块体单元数下完整圆盘的 Y 方向整体应力

Fig. 9 The integral stress-time curve in Y direction of the intact disc with different number of sub-blocks

可以看出,圆盘的 Y 方向整体应力先呈线性增加。随着加载的持续,圆盘中心附近的子块体单元应力首先达到岩石的拉伸强度,从而出现初始裂纹并沿加载方向扩展,并在较小时间段内完成圆盘的劈裂破坏,圆盘的 Y 方向整体应力随之迅速下降。子块体单元数越小时,圆盘表现出更高的整体强度,这是因为一方面单元数的减少将降低了应力场描述的准确性,另一方面更少数量的虚拟裂纹为裂纹的发育提供了更少的路径机会。

根据圆盘内初始裂纹出现时测量板的 Y 方向应力可以换算得到此时圆盘的径向外载荷 P,并进而根据公式 $\sigma_X = 2P/\pi D$ (D 为圆盘直径)计算得到此时圆盘中心的 X 方向应力。表 2 列出了不同子块体单元数条件下圆盘内初始裂纹出现的时间以及此时的径向加载力及所求圆盘中心应力。可以看出:子块体数增多时,出现初始裂纹时圆盘中心 X 方向应力总体上越趋近于 1.0 MPa,计算的精度更高;当子块体数为 6 001 及以上时,计算误差均在 1.5% 以内,达到了可接受的计算精度。

表 2 不同子块体数下圆盘开裂时间点与对应载荷

Tab. 2 The crack initiation time of disc with different number of sub-blocks and the corresponding load

子块体单元数	1 475	3 060	4 525	6 001	7 521
起裂时间/s	0.013 23	0.013 40	0.013 67	0.013 57	0.013 78
外载荷/kN	166.2	161.0	160.6	157.9	159.3
中心 σ_X /MPa	1.058	1.025	1.022	1.005	1.014

2.2 45°倾角预制裂纹圆盘

图 10 为一个带 α =45°倾角中心预制裂纹的圆盘模型。圆盘直径为 100 mm,预制裂纹的长度与宽度分别为 30 mm 和 0.25 mm,与文献[2]相应实验中的设置一致,加载板向下的加载速度取为 0.5 mm/s。圆盘的力学参数和 DDA 计算控制参数与 2.1 节一致,并仍然在大约 1 500 ~ 7 500 范围内每隔约 1 500 单元数开展模拟分析。

图 11 为不同子块体单元数下圆盘破坏的模拟结果及其与实验结果的比较。不同子块体单元数条件下圆盘的起裂点都是在预制裂纹的两个尖端处,之后裂纹扩展方向逐步趋近于加载方向并最终贯穿整个圆盘。子块体单元数越多,对应的扩展路径越清晰,裂纹带宽度越窄,破坏路径越接近实验结果。从图 12 中的 Y 方向整体应力时间曲线可以看出,当子块体单元数较少时,圆盘整体强度相对更高。当子块体数增加到约 4 500 及以上时,曲线基本收敛,说

明此时单元数对计算结果的影响已经很小。此外,当单元数从 3 082 增加到 4 553 时,曲线出现了跳变,这应该是本组算例中所取的单元数间隔偏大所致。

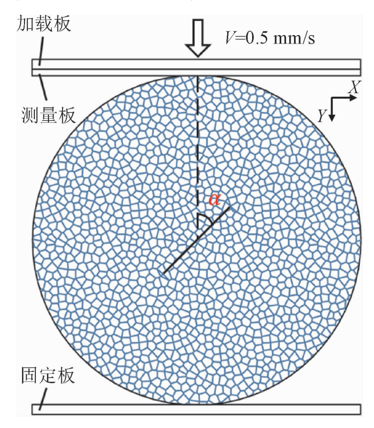


图 10　带 45°倾角预制裂纹的圆盘模型

Fig. 10　Disc model with a 45° pre-existing crack

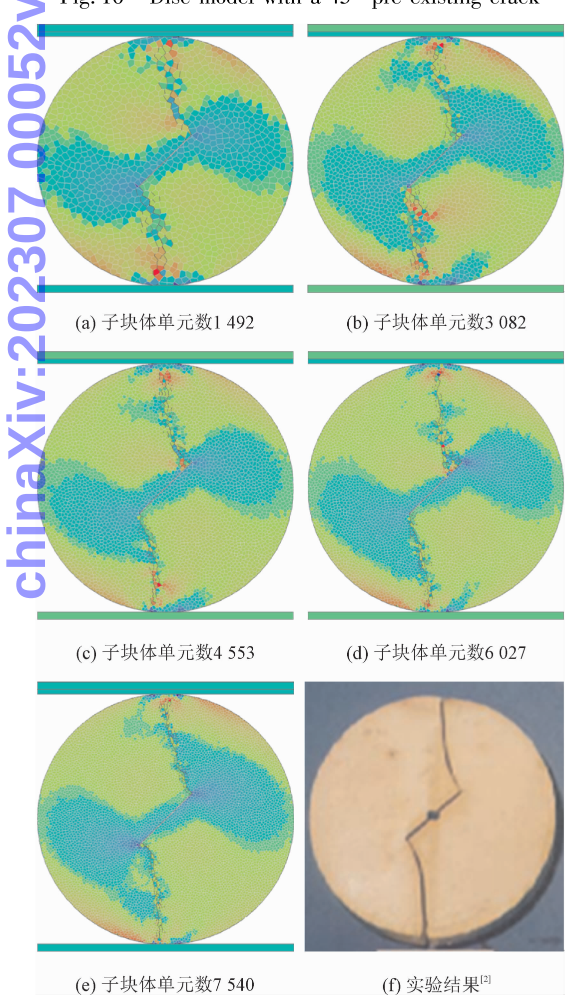


图 11　不同子块体单元数下 45°预制裂纹圆盘破坏模拟结果和实验结果

Fig. 11　DDA simulation results with different number of sub-blocks and experimental result of the disc with a 45° pre-existing crack

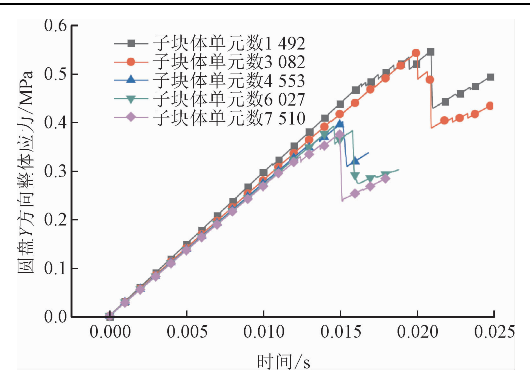


图 12　不同子块体单元数下 45°预制裂纹圆盘的 Y 方向整体应力

Fig. 12　The integral tress-time curve in Y direction of the disc with 45° pre-existing crack under different number of sub-blocks

2.3　不同倾角预制裂纹圆盘

在 2.2 节的基础上,本节考虑圆盘中心预制裂纹倾角 α 由 0°到 75°变化的情况,每隔 15°进行模拟分析,圆盘的子块体单元数均在 7 500 左右。图 13 和图 14 分别为不同倾角中心预制裂纹圆盘破坏的模拟结果和实验结果。

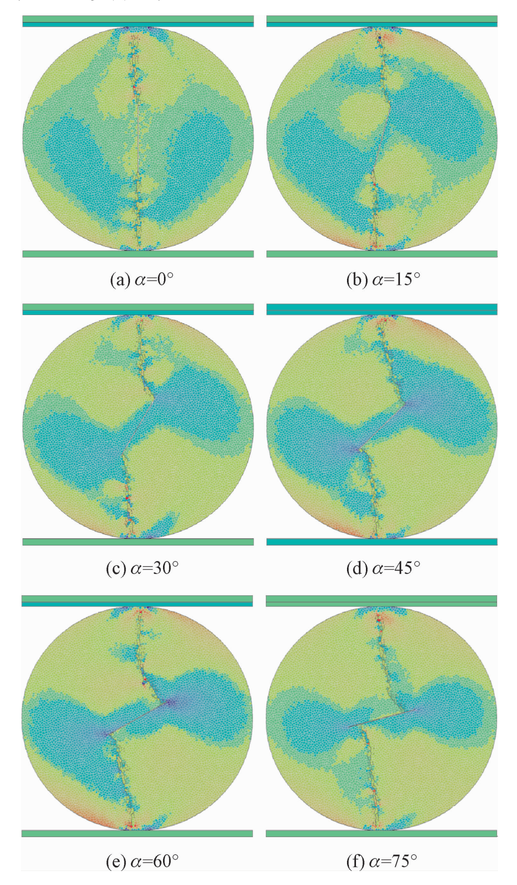


图 13　不同倾角中心预制裂纹圆盘的模拟结果

Fig. 13　Simulation results of discs with different pre-existing crack inclinations

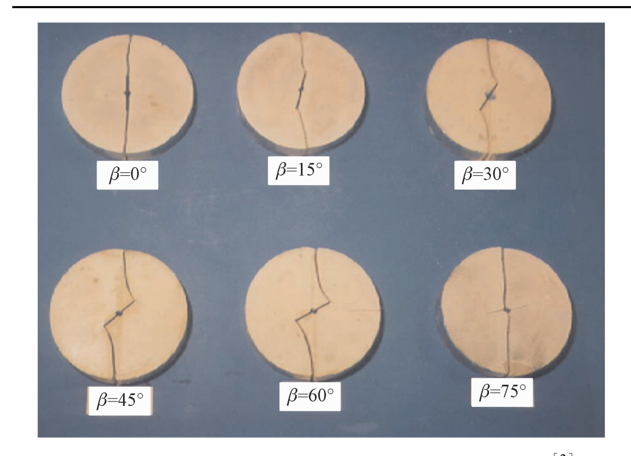


图 14　不同倾角中心预制裂纹圆盘的实验结果[2]

Fig. 14　Experimental results of discs with different pre-existing crack inclinations[2]

可以看出,除 α =75°的情况外,DDA 模拟得到的圆盘开裂破坏路径与相应的实验结果高度吻合。当 α 在 0°~60°范围内时,圆盘的起裂点都是在预制裂纹的两个尖端处,随后裂纹扩展路径逐渐趋近于加载方向并最终贯穿整个圆盘。当 α =75°时,DDA 模拟和实验中的初始裂纹都不是出现在预制裂纹尖端。DDA 模拟中初始裂纹出现在离预制裂纹两个尖端一定距离位置的初始裂纹面处,这与文献[22]中的实验现象是一致的。而在图 14 的实验中,初始裂纹出现在圆盘中心位置,这是因为受到了圆盘中心初始加工孔的影响。

图 15 是 α 为 60°和 75°时,考虑圆盘中心直径为 3 mm 的小孔时的模拟结果。可以看出 DDA 模拟结果与实验结果吻合,证明在 α =60°时,圆孔对开裂破坏影响可以忽略。事实上,更多的计算表明,当 α <60°时,圆孔对圆盘开裂破坏路径的影响都可以忽略。而 α =75°时,圆孔附近的应力集中导致了初始裂纹从圆盘中心发育。以上结果表明 DDA 模拟很好地捕捉到了圆盘受载过程中的变形和开裂破坏特征。

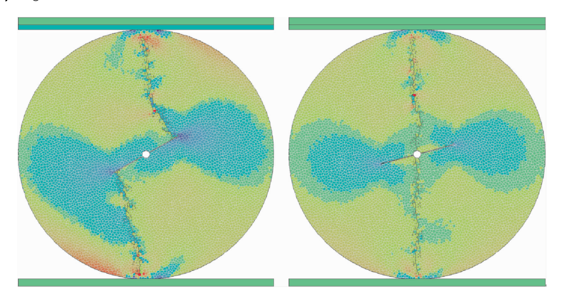


图 15　带中心小孔预制裂纹圆盘的模拟结果

Fig. 15　Simulation results of pre-existing crack discs with a center hole

3　结　论

本研究提出了一种基于随机圆的 Voronoi 单元模型建立方法,该方法能够考虑颗粒的级配特性,具有较高的生成效率,并能保证必须要的周期性。径向压缩加载下完整圆盘和和带预制裂纹圆盘开裂破坏的子块体单元 DDA 方法结果模拟表明:较小的子块体单元数将得到更高的圆盘整体强度;随着子块体单元数的增大,圆盘的整体响应曲线趋于收敛,破坏起裂位置更加接近真实,开裂破坏路径更加清晰;采用较大的单元数将能够得到与实验结果一致的开裂破坏模拟结果,并且模拟还准确的再现了圆盘中心小孔对开裂破坏路径的影响。

使用 Voronoi 子块体单元 DDA 方法能够有效模拟岩石的开裂破坏过程。下一步将开展 Voronoi 颗粒级配及形态对岩石开裂破坏模拟的影响研究。

参考文献:

[1]　LI G,TANG C A. A statistical meso-damage mechanical method for modeling trans-scale progressive failure process of rock[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences,2015,74:133-150.

[2]　AL-SHAYEA N A. Crack propagation trajectories for rocks under mixed mode Ⅰ-Ⅱ fracture[J]. Engineering geology,2005,81(1):84-97.

[3]　张盛,王启智. 用 5 种圆盘试件的劈裂试验确定岩石断裂韧度[J]. 岩土力学,2009,30(1):12-18.
ZHANG Sheng,WANG Qizhi. Determination of rock fracture toughness by split test using five types of discspecimens[J]. Rock and soil mechanics,2009,30(1):12-18(in Chinese).

[4]　张盛,何江达,王启智. 用圆孔平台巴西圆盘确定岩石拉伸强度的非局部应力方法[J]. 应用力学学报,2008,25(3):503-507.
ZHANG Sheng,HE Jiangda,WANG Qizhi. Nonlocal stress method for determination of rock tensile strength Holed-Flattened Brazilian discspecimen[J]. Chinese journal of applied mechanics,2008,25(3):503-507(in Chinese).

[5]　王晨玺杰,邓华锋,王伟,等. 含水状态对砂岩劈裂抗拉力学特性影响研究[J]. 应用力学学报,2018,35(3):655-661.
WANG Chenxijie,DENG Huafeng,WANG Wei,et al. Effects of water content on the mechanical properties of sandstone splitting test[J]. Chinese journal of applied mechanics,2018,35(3):655-

661(in Chinese).

[6] ZHU W C,TANG C A. Numerical simulation of Brazilian disk rock failure under static and dynamic loading[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences,2006,43(2):236-252.

[7] SAKSALA T,HOKKA M,KUOKKALA V T,et al. Numerical modeling and experimentation of dynamic Brazilian disc test on Kuru granite[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences,2013,59:128-138.

[8] 孟京京,曹平,张科,等. 基于颗粒流的平台圆盘巴西劈裂和岩石抗拉强度[J]. 中南大学学报(自然科学版),2013,44(6):2449-2454.
MENG Jingjing,CAO Ping,ZHANG Ke,et al. Brazil split test of flattened disk and rock tensile strength using particle flowcode[J]. Journal of Central South University (science and technology),2013,44(6):2449-2454(in Chinese).

[9] YANG S Q,HUANG Y H. Particle flow study on strength and meso-mechanism of Brazilian splitting test for jointed rock mass[J]. Acta mechanica Sinica,2014,30(4):547-558.

[10] 张世瑞,邱士利,李邵军,等. 北山花岗岩细观非均质性对单轴压缩力学特性影响的 FDEM 数值研究[J]. 岩石力学与工程学报,2022,41(增刊 1):2658-2672.
ZHANG Shirui,QIU Shili,LI Shaojun,et al. Study on mechanical properties of Beishan granite meso-heterogeneity under uniaxial compression with FDEM[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering,2022,41(S1):2658-2672(in Chinese).

[11] NING Y J,AN X M,MA G W. Footwall slope stability analysis with the numerical manifold method[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences,2011,48(6):964-975.

[12] KANG G,NING Y J,CHEN P W,et al. Comprehensive simulations of rock fracturing with pre-existing cracks by the numerical manifold method[J]. Acta geotechnica,2022,17(3):857-876.

[13] LIU Q S,JIANG Y L,WU Z J,et al. A Voronoi element based-numerical manifold method (VE-NMM) for investigating micro/macro-mechanical properties of intact rocks[J]. Engineering fracture mechanics,2018,199:71-85.

[14] WU Z J,XU X Y,LIU Q S,et al. A zero-thickness cohesive element-based numerical manifold method for rock mechanical behavior with micro-Voronoi grains[J]. Engineering analysis with boundary elements,2018,96:94-108.

[15] SHI G H. Discontinuous deformation analysis - a new method for computing stress,strain and sliding of block systems[D]. Berkeley:University of California,1988.

[16] 甯尤军,吕昕阳. 岩石力学与工程问题的 DDA 和 NMM 模拟研究进展[J]. 应用力学学报,2022,39(4):657-672.
NING Youjun,LÜ Xinyang. Research progress in DDA and NMM simulations of rock mechanics and engineeringproblems[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(4):657-672(in Chinese).

[17] JIAO Y Y,ZHANG X L,ZHAO J. Two-dimensional DDA contact constitutive model for simulating rock fragmentation[J]. Journal of engineering mechanics,2012,138(2):199-209.

[18] 倪克松,甯尤军. DDA 子块体开裂模拟算法的优化与验证[J]. 地下空间与工程学报,2014,10(5):1017-1022.
NI Kesong,NING Youjun. The optimization and validation of sub-block method for modeling rock fracturing within discontinuous deformation analysis framework[J]. Chinese journal of underground space and engineering,2014,10(5):1017-1022(in Chinese).

[19] YU P C,ZHANG Y B,PENG X Y,et al. Distributed-spring edge-to-edge contact model for two-dimensional discontinuous deformation analysis[J]. Rock mechanics and rock engineering,2020,53(1):365-382.

[20] 张开雨,刘丰,夏开文. 模拟脆性材料动态裂纹扩展的非连续变形分析方法[J]. 岩土工程学报,2022,44(1):125-133.
ZHANG Kaiyu,LIU Feng,XIA Kaiwen. Numerical study on dynamic crack propagation of brittle materials by discontinuous deformation analysis[J]. Chinese journal of geotechnical engineering,2022,44(1):125-133(in Chinese).

[21] NI K S,YANG J,NING Y J,et al. A modified sub-block DDA fracturing modelling method for rock[J]. Engineering analysis with boundary elements,2020,111:154-166.

[22] CHANG X,GUO T F,ZHANG S. Cracking behaviours of layered specimen with an interface crack in Brazilian tests[J]. Engineering fracture mechanics,2020,228:106904.

(编辑　张璐)